T^{le} S

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES SERIE N°1

Exercice n°1 : Pour tous (5 points)

Partie A : Restitution Organisée de Connaissance

Pré requis *: La suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si tout intervalle du type $]A\ ;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*

Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice n°2 (Pour tous : 5 points)

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}$.

1. Calculer u_2 ; u_3 ; u_4 et u_5.
2. Conjecturer une expression explicite de u_n, pour n supérieur ou égal à 1.
3. Démontrer la propriété conjecturée.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice n°3 : Pour ceux qui suivent l'enseignement obligatoire (5 points)

La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n^2 - 3\sin(n)}{n^2 + 1}$.

1. Donner une valeur approchée de u_{10} et u_{100}.
2. Que peut-on conjecturer concernant la limite éventuelle de la suite u ?
3. Prouver que pour tout entier naturel n, $\dfrac{2n^2 - 3}{n^2 + 1} \leq u_n \leq \dfrac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$.
4. En déduire la limite de la suite u.

Exercice n°3 : Pour ceux qui suivent l'enseignement de spécialité (5 points)

Déterminer les entiers relatifs n tels que $\dfrac{2n + 5}{3n - 10}$ soit un entier.

Exercice n°4 : Pour tous (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2.

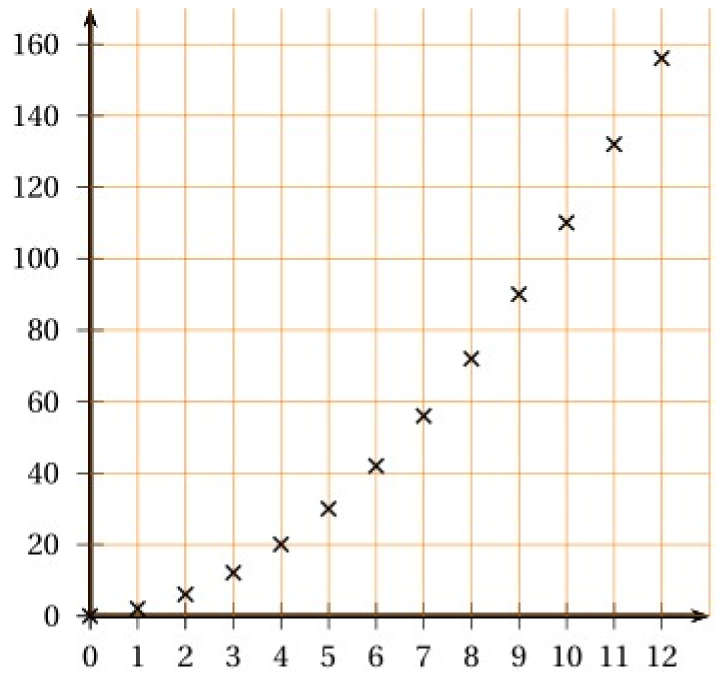
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel u est un réel	**Variables :**	n est un entier naturel u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur $u+2i+2$ Fin Pour	**Traitement :**	u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n-1$: u prend la valeur $u+2i+2$ Fin Pour
Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. A l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points suivant où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.

b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.