On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$.

1-a) Calculer u_1 et u_2 .

$u_1 = \frac{3u_0}{1 + 2u_0} = \frac{3}{4}$, $u_2 = \frac{3u_1}{1 + 2u_1} = \frac{9}{10}$.

b) Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0 < u_n$.

Soit P_n : « $u_n > 0$ » .

<u>Initialisation</u> : P_0 est vrai, puisque $u_0 = \frac{1}{2}$.

<u>Hérédité</u> : Soit P_n vrai ($u_n > 0$) . On déduit $\frac{3u_n}{1 + 2u_n} > 0$ au vu des opérations utilisées, donc $u_{n+1} > 0$.

On a déduit P_{n+1} vrai, sous réserves que P_n le soit.

<u>Conclusion</u> : P_n est vrai pour tout n entier naturel.

On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

Démontrons cette propriété : Soit P_n « $u_n < 1$ » , ce qui équivaut à $u_n - 1 < 0$.

(il est conseillé de toujours comparer à 0 plutôt qu'à un nombre quelconque.

Initialisation : P_0 est vrai, puisque $u_0 = \frac{1}{2} < 1$.

<u>Hérédité</u> : Soit P_n vrai ($u_n < 1$) ou $u_n - 1 < 0$. On déduit $u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n}{1 + 2u_n} - 1 = \frac{3u_n - (1 + 2u_n)}{1 + 2u_n} = \frac{u_n - 1}{1 + 2u_n} < 0$.

<u>Conclusion</u> : P_n est vrai pour tout n entier naturel.

c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Comme les u_n sont tous positifs, comparons $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{1 + 2u_n}$, or $u_n < 1 \Rightarrow 1 + 2u_n < 3$, d'où $\frac{3}{1 + 2u_n} > \frac{3}{3}$, soit $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Ceci équivaut à $u_{n+1} > u_n$, les termes u_n étant positifs.

<u>*Méthode classique, toujours utilisable*</u> : Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{1 + 2u_n} - u_n = \frac{3u_n - (1 + 2u_n).u_n}{1 + 2u_n} = \frac{2u_n - 2u_n^2}{1 + 2u_n} = \frac{2u_n(1 - u_n)}{1 + 2u_n} > 0$, puisque tous les facteurs le sont.

On déduit $u_{n+1} > u_n$.

d) Démontrer que la suite (u_n) converge.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 , donc elle est convergente vers $L < 1$.

2/ Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3 .

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{1 + 2u_n}}{1 - \frac{3u_n}{1 + 2u_n}} = \frac{\frac{3u_n}{1 + 2u_n}}{\frac{(1 + 2u_n) - 3u_n}{1 + 2u_n}} = \frac{3u_n}{1 - u_n} = 3v_n$$. soit (v_n) géométrique, de raison $q = +3$.

Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .

$v_{n+1} = 3v_n$, donc (v_n) suite géométrique de raison $q = +3$, de 1[er] terme $v_0 = \dfrac{u_0}{1 - u_0} = +1$.

On déduit : $v_n = v_0.q^n = 3^n$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \dfrac{3^n}{3^n + 1}$.

$v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n} \Leftrightarrow v_n - u_n.v_n = u_n \Leftrightarrow v_n = u_n + u_n.v_n \Leftrightarrow v_n = u_n(1 + v_n)$, d'où : $u_n = \dfrac{v_n}{1 + v_n} = \dfrac{3^n}{3^n + 1}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

$u_n = \dfrac{3^n}{3^n + 1} = \dfrac{3^n}{3^n(1 + \frac{1}{3^n})} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{3^n}}$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$, car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$.