La fonction tangente, notée tan , est définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1/ Quel est l'ensemble de définition de la fonction tangente ?

$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est définie (calculable) si $\cos(x) \neq 0$, soit $x \neq +\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les valeurs interdites sont $+\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}$, au nombre de tours (2π) près , soit $+\dfrac{\pi}{2}$ au nombre de demi-tours (π) près.

$D_{\tan} = \mathbb{R} - \{+\dfrac{\pi}{2} + k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2/ Etudier la parité de la fonction tangente ?

$\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$, pour tout $x \in D_{\tan}$.

La fonction tangente est *impaire* , donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

3/ Montrer que la fonction tangente est périodique, de période π .

$\tan(x + \pi) = \tan(\pi + x) = \dfrac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)}$, soit $\tan(x + \pi) = \tan(x)$, pour tout $x \in D_{\tan}$.

La fonction tangente est périodique, de période $T = \pi$, donc on peut limiter son étude à $]-\dfrac{\pi}{2} ; +\dfrac{\pi}{2}[$.

Si on utilise le fait que tan soit *impaire* , on peut limiter l'étude à $[0 ; +\dfrac{\pi}{2}[$, puis symétriser les résultats par rapport à l'origine O .

4/ Calculer $\tan'(x)$, et étudier son signe sur $]-\dfrac{\pi}{2} ; +\dfrac{\pi}{2}[$.

$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, de forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u'(x) = \sin'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$.

On déduit : $\tan' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, soit $\tan'(x) = \dfrac{\cos(x).\cos(x) - (-\sin(x)).\sin(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$.

Deux présentations sont possibles : $\begin{cases} \tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} \text{ , sachant } \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \\ \tan'(x) = 1 + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \end{cases}$.

Dans les deux cas, on constate que $\tan'(x) > 0$, pour tout $x \in D_{\tan}$.

La fonction tangente est partout strictement croissante.

5/ Déterminer les limites de $\tan(x)$ lorsque x tend vers $-\dfrac{\pi}{2}$ par valeurs supérieures, et vers $+\dfrac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures.

Si $\begin{cases} x \to -\pi/2 \\ x > -\pi/2 \end{cases}$: $\begin{cases} \sin(x) \to -1 \\ \cos(x) \to 0^+ \end{cases}$, d'où : $\tan(x) \to -\infty$.

Si $\begin{cases} x \to \pi/2 \\ x < \pi/2 \end{cases}$: $\begin{cases} \sin(x) \to +1 \\ \cos(x) \to 0^+ \end{cases}$, d'où : $\tan(x) \to +\infty$.

Interpréter graphiquement ces limites.

La fonction tangente présente une asymptote verticale en $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = +\frac{\pi}{2}$.

6/ Dresser le tableau de variation de la fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2}[$.

x	$-\pi/2$		0		$+\pi/2$
$\tan'(x)$	$\|$	+	1	+	$\|$
$\tan(x)$	$\|-\infty$	↗	0	↗	$+\infty\|$

7/ Tracer la courbe représentative de la fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2}[$.