Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4(x + 1)^4 - 5(x + 1)^2 - 9 \geq 0$.

Il faut se ramener à une équation du second degré, par le changement de variable $X = (x + 1)^2$.

Comme $a^4 = (a^2)^2$, l'inéquation devient : $4X^2 - 5X - 9 \geq 0$.

On constate que $a - b + c = 0$ $(4 + 5 - 9)$, donc les racines sont $X_1 = -1$ et $X_2 = -\dfrac{c}{a} = +\dfrac{9}{4}$.

Il est conseillé d'établir le tableau de signes sous la forme X :

X	$-\infty$		-1		$+9/4$		$+\infty$
$4X^2 - 5X - 9$		+	0	–	0	+	

L'inéquation $4X^2 - 5X - 9 \geq 0$ impose $X \leq -1$ ou $X \geq +\dfrac{9}{4}$.

<u>1er cas</u> : $X \leq -1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 \leq -1$, ce qui est impossible, puisqu'un carré est positif ou nul.

Donc $S_1 = \varnothing$.

<u>2ème cas</u> : $X \geq +\dfrac{9}{4} \Leftrightarrow (x + 1)^2 \geq +\dfrac{9}{4}$.

On sait que $x^2 \geq b^2 \Leftrightarrow |x| \geq |b|$. *La mise au carré conserve l'ordre des valeurs absolues des nombres (leur valeur arithmétique, sans signe*).

Donc : $(x + 1)^2 \geq +\dfrac{9}{4} \Leftrightarrow |x + 1| \geq +\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \leq -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{5}{2} \\ \text{ou} \\ x + 1 \geq +\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \geq +\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

$S_2 =]-\infty ; -\dfrac{5}{2}] \cup [+\dfrac{1}{2} ; +\infty[$.

Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 = S_2 =]-\infty ; -\dfrac{5}{2}] \cup [+\dfrac{1}{2} ; +\infty[$.

<u>*Autre Méthode*</u> :

$4X^2 - 5X - 9 = 4(X - X_1)(X - X_2) = 4(X + 1)(X - \dfrac{9}{4}) = (X + 1)(4X - 9)$.

Comme $X = (x + 1)^2$, on obtient : $[(x + 1)^2 + 1][4(x + 1)^2 - 9] \geq 0$.

Sachant $(x + 1)^2 + 1 > 0$, l'inéquation équivaut à $4(x + 1)^2 - 9 \geq 0$ (forme $a^2 - b^2$).

$[2(x + 1) - 3][2(x + 1) + 3] \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(2x + 5) \geq 0$.

Un tableau de signes donne bien $S_2 =]-\infty ; -\dfrac{5}{2}] \cup [+\dfrac{1}{2} ; +\infty[$.

Conclusion : $S =]-\infty ; -\dfrac{5}{2}] \cup [+\dfrac{1}{2} ; +\infty[$.