Déterminer la limite de f en α :

1/ $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ pour $\alpha = 0$.

Seule la limite en 0 par valeurs supérieures est possible.

$f(x) = \dfrac{1}{x} \ln x$ avec $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

Après produit, on déduit : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} \ln x = -\infty$.

2/ $f(x) = \dfrac{\ln x}{x + 1}$ pour $\alpha = +\infty$.

Constatons tout d'abord l'indétermination : Si $x \to +\infty$, alors $\ln x \to +\infty$ et $\ln x \to +\infty$.

$\dfrac{\ln x}{x + 1}$ est indéterminé, de forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Il faut se rapprocher de la formule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$.

Comme $\dfrac{\ln x}{x + 1} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{x + 1}$, on déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} \times \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x + 1}\right) = 0^+ \times 1 = 0$.

3/ $f(x) = \dfrac{\ln (1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ pour $\alpha = 0$.

Constatons tout d'abord l'indétermination : Si $x \to 0^+$, alors $\sqrt{x} \to 0$ et $1 + \sqrt{x} \to 1$.

En conséquence : $\ln (1 + \sqrt{x}) \to 0$ et $\dfrac{\ln (1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ est indéterminé, de forme $\dfrac{0}{0}$.

On pose $h = \sqrt{x}$, soit $h \to 0^+$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln (1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\ln (1 + h)}{h} = 1$, comme vu au 3/ .