Trinôme du second degré - Tableau de signe

Si le trinôme $a\,x^2 + b\,x + c$ admet des racines , α et β, il est du signe de a à l'extérieur des racines

Si $\Delta > 0$ et $a > 0$ alors $a\,x^2 + b\,x + c > 0 \Leftrightarrow x$ extérieur aux racines α et $\beta \Leftrightarrow x < \alpha$ ou $x > \beta$

d'où le tableau : $\mathbf{\Delta > 0}$ $\Leftrightarrow$ deux racines $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$a\,x^2 + b\,x + c$		**sgn(*a*)**	0	sgn(- *a*)	0	**sgn(*a*)**	

Ainsi : $2x^2 + 5x - 7$, qui admet pour racines -7/2 et +1 , a pour tableau de signes : ($a = +2$ positif)

x	$-\infty$		-7/2		+1		$+\infty$
$2x^2 + 5x - 7$		+	0	-	0	+	

Si le trinôme $a\,x^2 + b\,x + c$ admet une racine double , $\alpha = \beta$, il est partout du signe de a,
sauf sur sa racine double, valeur qui l'annule.

d'où le tableau : $\mathbf{\Delta = 0}$ $\Leftrightarrow$ racines confondues $\alpha = \beta = -\dfrac{b}{2a}$

x	$-\infty$		-b/2a		$+\infty$
$a\,x^2 + b\,x + c$		**sgn(*a*)**	0	**sgn(*a*)**	

Exemple : Résoudre dans IR , $\dfrac{-x^2+6x-9}{x+2} \leq 0$

Pour $-x^2 + 6x - 9$, $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(-1)(-9) = 0 \Rightarrow$ racine double $\alpha = \beta = -\dfrac{b}{2a} = +3$

Le trinôme est partout du signe de $a = -1$, donc négatif, sauf pour +3 où il est nul.

Pour $x + 2$, racine $\gamma = -2$

x	$-\infty$		-2		+3		$+\infty$
$-x^2 + 6x - 9$		-	|	-	0	-	
$x + 2$		-	0	+	|	+	
***R*(*x*)**		+	||	-	**0**	-	

Donc ***S* =] -2 ; + ∞ [**

Si le trinôme $a\,x^2 + b\,x + c$ n'admet pas de racine, il est partout du signe de a.

d'où le tableau : $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ pas de racine

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$a\,x^2 + b\,x + c$	**sgn(a)**

Exemple : Résoudre dans IR , $\dfrac{x^2}{x-3} \le 1$

On n'effectue pas le produit en croix qui aboutirait à $x^2 \le x - 3$, car nous ne connaissons pas le signe du dénominateur $x - 3$.

Si celui-ci est négatif, il y aurait changement de sens de l'inéquation.

Dans une inéquation, on ne supprime pas un dénominateur dont on ne connaît pas le signe

$\dfrac{x^2}{x-3} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x-3} - 1 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - x + 3}{x-3} \le 0$

Pour $x^2 - x + 3$, $\Delta = b^2 - 4ac = -13 \Rightarrow$ pas de racine

Le trinôme est partout du signe de $a = +1$, donc positif.

Pour $x - 3$, racine $\alpha = +3$

x	$-\infty$		$+3$		$+\infty$
$x^2 - x + 3$		+	|	+	
$x - 3$		-	0	+	
***R*(*x*)**		**-**	||	**+**	

Donc **S =] - ∞ ; + 3 [**

Les tableaux de signes imposent souvent des factorisations préalables. Il faut également s'assurer que le second membre est nul.

Aucun tableau de signes n'a de sens si le second membre n'est pas 0.

Exemple : Résoudre dans IR , $x^3 \le x + 6$

On ramène les termes à gauche pour faire apparaître 0 : $x^3 - x - 6 \le 0$

Le polynôme $P(x) = x^3 - x - 6$ est du 3ème degré, il faut découvrir une racine évidente.

Si le polynôme $P(x)$ s'annule en $x = a$, il est possible de factoriser le binôme $x - a$. $P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - a).Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme de degré inférieur de 1 à celui de $P(x)$

$P(+2) = 0$. On peut donc factoriser $x - 2$.

La factorisation donne : $x^3 - x - 6 = (x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (-2a + b)x^2 + (-2b + c)x - 2c$.

En identifiant les polynômes, on obtient : $\underline{a = +1}$; $-2a + b = 0$; $-2b + c = -1$; $-2c = -6$ d'où $\underline{c = +3}$, $\underline{b = +2}$

Donc : $x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$

Pour $x^2 + 2x + 3$, $\Delta = b^2 - 4ac = -8 \Rightarrow$ pas de racine. Le trinôme est partout du signe de $a = +1$ (positif).

Pour $x - 2$, racine $\alpha = +2$

x	$-\infty$		$+2$		$+\infty$
$x^2 + 2x + 3$		+	|	+	
$x - 2$		-	0	+	
$\boldsymbol{P(x)}$		**-**	0	**+**	

Donc $\boldsymbol{S =]-\infty\,;+2[}$ **.**